

Induction Electromagnétique

CHAPITRE 5

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Dr N'CHO Janvier Sylvestre

Introduction

Les convertisseurs électromécaniques (générateurs et moteurs électriques) utilisent des circuits électriques en mouvement dans un champ magnétique. Le circuit électrique mobile est soumis à des actions de Laplace. Il est généralement le siège d'une force électromotrice induite. On appelle transducteur ou convertisseur électromécanique, un dispositif qui convertit la puissance mécanique en puissance électrique (générateur) ou la puissance électrique en puissance mécanique (moteur). Dans ce chapitre on étudie des phénomènes d'induction dans des circuits mobiles dans un champ magnétique stationnaire. Les dispositifs modèles présentés fonctionnent soit en générateur, quand ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit en moteur quand ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

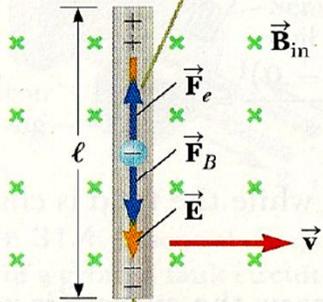
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

A-Circuit en translation type rail de Laplace en mode générateur

Interprétation physique, lien avec la loi de Faraday (1)

On considère un conducteur métallique rectiligne mobile dans un champ magnétique extérieur uniforme. La tige est tirée par un opérateur extérieur à vitesse uniforme (cf. schéma).

In steady state, the electric and magnetic forces on an electron in the conductor are balanced.



Due to the magnetic force on electrons, the ends of the conductor become oppositely charged, which establishes an electric field in the conductor.

Figure 31.7 A straight electrical conductor of length ℓ moving with a velocity \vec{v} through a uniform magnetic field \vec{B} directed perpendicular to \vec{v} .

Chaque électron est soumis à:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Accumulation de charge + sur le haut et - vers la bas donc création d'une différence de potentiel ΔV

Apparition d'un champ électrique \vec{E} de norme $\Delta V/\ell \Rightarrow$ nouvelle force sur les électrons $q\vec{E}$

On obtient une pile de différence de potentiel (d.d.p) à vide qui vaut $\Delta V = E\ell = B\ell v$

Conditions d'équilibres:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_E \Rightarrow qE = qvB \Rightarrow E = vB$$

(on a encore un effet modérateur type Lenz, \vec{F}_E compense \vec{F}_B)

Interprétation physique, lien avec la loi de Faraday (2)

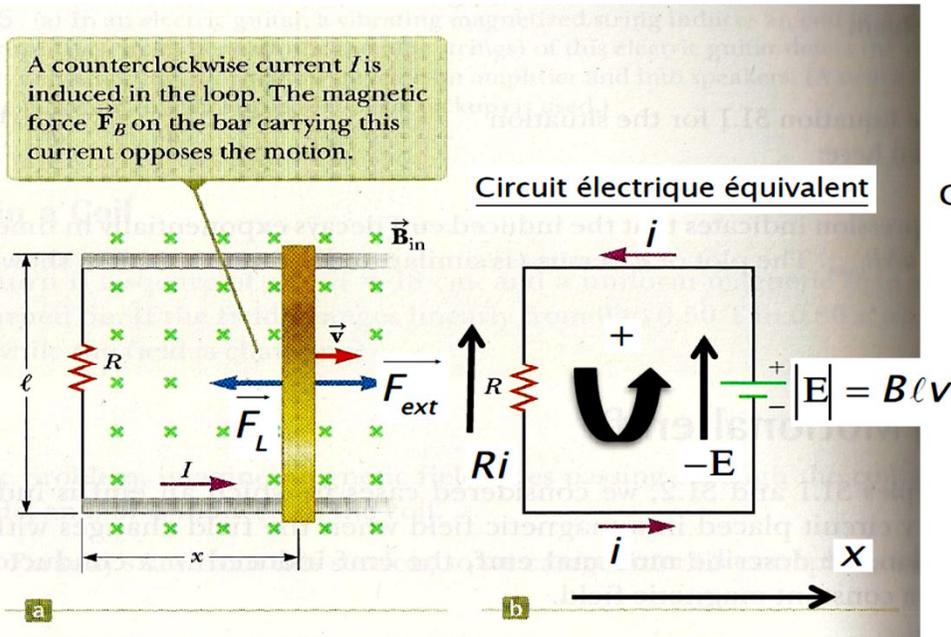


Figure 31.8 (a) A conducting bar sliding with a velocity \vec{v} along two conducting rails under the action of an applied force \vec{F}_{app} . (b) The equivalent circuit diagram for the setup shown in (a).

On fait débiter la pile ainsi créée sur une résistance R grâce à un dispositif du type rails de Laplace.
L'intensité du courant qui circule vaut: $i = \Delta V/R = B\ell v/R$

Ce résultat est-il cohérent avec la loi de l'induction de Faraday ?

Le circuit délimite une surface $S = \ell x$
Il y a un flux magnétique à travers S : $\Phi_B = BS$

Loi de l'induction de Faraday
apparition d'une f.e.m dans le circuit
$$E = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dB\ell x}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

On retrouve bien l'apparition d'une d.d.p aux bornes de la tige telle que $\Delta V = |E|$

On néglige le flux propre $\Phi_{propre} = Li$
(on prend $L = 0$)

Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique

Equation électrique: LOI DES MAILLES

On considère le schéma équivalent électrique de la page précédente, attention aux choix dans les conventions de signe pour la loi des mailles. On note R la résistance de l'ensemble du circuit (qui peut inclure celle de la tige).

$$Ri = -E \Leftrightarrow Ri = B\ell v$$

Aspect énergétique

On multiplie de part et d'autre l'équation précédente par l'intensité du courant:

$$Ri^2 = -Ei \Leftrightarrow \underbrace{Ri^2}_{\substack{\text{Puissance électrique} \\ \text{dissipée dans la résistance,} \\ \text{effet Joule}}} = \underbrace{(B\ell v)i}_{\substack{\text{Puissance électrique fournie} \\ \text{au circuit par le phénomène} \\ \text{d'induction}}}$$

Equation mécanique: PRINCIPE FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE

Système étudiée: La tige

Bilan des forces:

$$\rightarrow \vec{F}_L = -i\ell B \vec{u}_x, \text{ force de Laplace}$$

$$\rightarrow \vec{F}_{ext}, \text{ force d'un agent extérieur qui met}$$

en mouvement la tige, elle peut inclure des forces de frottement etc...

La seconde loi de Newton projetée sur x donne:

$$m \frac{dv}{dt} = -i\ell B + F_{ext}$$

Aspect énergétique

En régime stationnaire quand $v = \text{constante}$:

$$(\text{Puissance de } F_{ext}) = F_{ext} \times v = (B\ell v)i \text{ car } F_{ext} = F_L$$

Puissance électrique = Puissance mécanique

Lors du couplage électromécanique, il n'y a pas de modification de l'énergie totale, seulement conversion d'une forme à une autre.

On parle de **transduction**.

Vitesse et courant induit (1)

Les équations électrique et mécanique sont couplées car toutes deux contiennent $i(t)$ et $v(t)$:

$$\begin{cases} i = \frac{B\ell v}{R} & (a) \\ m \frac{dv}{dt} = -i\ell B + f_{ext} & (b) \end{cases}$$

$$(b) \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = \ell B \left(-\frac{B\ell v}{R} \right) + f_{ext} = -\frac{\ell^2 B^2}{R} v + f_{ext} \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{R} v = f_{ext}$$

La force de Laplace apparait, dans cette équation différentielle du 1^{er} ordre en v , comme une force de frottement fluide ; en effet, la force de Laplace s'oppose au déplacement de la tige, conformément à la loi de Lenz.

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{R} v = f_{ext} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{mR} v = \frac{f_{ext}}{m}$$

Vitesse et courant induit (2)

En supposant qu'à $t = 0$, $v = 0$ on a :

$$v(t) = \frac{Rf_{ext}}{(B\ell)^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad i(t) = \frac{f_{ext}}{B\ell} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

□ S'il n'y avait pas de champ magnétique, l'équation de mouvement se réduirait à $m \frac{dv}{dt} = f_{ext}$ et la vitesse $v(t) = \frac{f_{ext}}{m} t$. Le graphe $v(t)$ serait une droite passant par l'origine de pente $\frac{f_{ext}}{m}$. Elle se confondrait avec la tangente à l'origine. La vitesse tendrait à l'infini.

□ En présence du champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $\vec{f}_L = -i(t)\ell B \vec{u}_x = \frac{(B\ell)^2}{R} v(t) \vec{u}_x$; Cette force de type frottement fluide est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la tige d'autant plus fort que la vitesse est grande.

Vitesse et courant induit (3)

C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le mouvement de la tige crée un courant induit i , qui à son tour crée la force de Laplace qui tend à s'opposer au mouvement de la tige. Pendant les premiers instants du mouvement, le courant induit est encore faible et la force de Laplace issue est encore très faible. Le mouvement de la tige est donc le même que s'il n'y avait pas encore de phénomène d'induction: la courbe $v(t)$ se confond donc avec sa tangente à l'origine, d'équation $v(t) = f_{ext}t/m$ (qui serait la solution du problème $B = 0$).

□ En régime permanent, $v_{lim} = Rf_{ext}/(B\ell)^2$. Cette vitesse finie est due à la force de Laplace qui compense exactement la force f_{ext} , car l'équation de mouvement se résume à $f_{ext} + f_L = 0$

Vitesse et courant induit (4)

lorsque $dv/dt = 0$. Les influences de R , B et ℓ sur v_{lim} peuvent s'interpréter : si la résistance R du circuit est grande, le courant induit est faible, la force de Laplace aussi : elle s'oppose peu à f_{ext} et la vitesse limite v_{lim} est grande. Si B et ℓ sont grands, les effets d'induction le sont aussi, donc f_L s'oppose beaucoup à f_{ext} , réduisant ainsi v_{lim} .

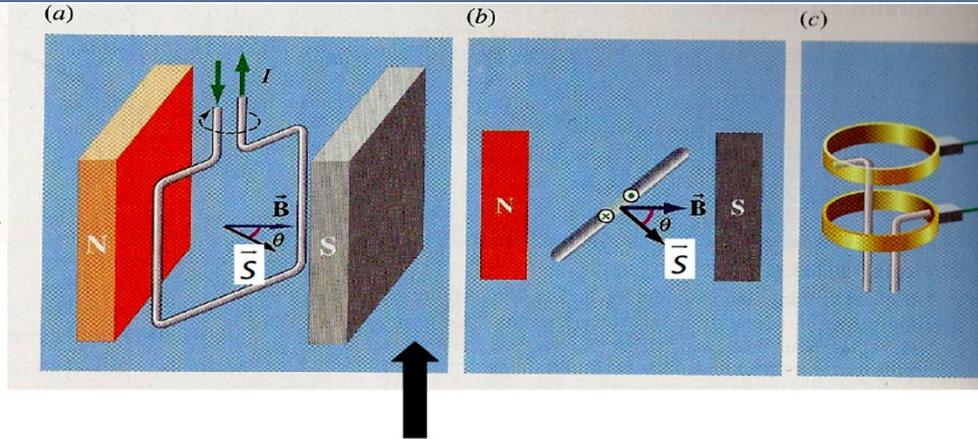
□ Dans la force de Laplace, on a le terme $(B\ell)^2$. Donc quel que soit le signe de B , la force de Laplace s'oppose toujours au mouvement, conformément à la loi de modération de Lenz.

B-Spire en rotation dans un champ magnétique uniforme

Description

Figure 10.23 ▶

(a) On observe une f.é.m. induite lorsqu'une spire tourne dans un champ magnétique.
 (b) La spire en rotation vue du haut. (c) Le courant induit alimente un circuit extérieur par l'intermédiaire de contacts à balais qui glissent sur deux bagues collectrices.



Un générateur est constitué d'une bobine de N spires qu'un « agent extérieur » fait tourner à vitesse angulaire constante dans un champ magnétique extérieur uniforme.

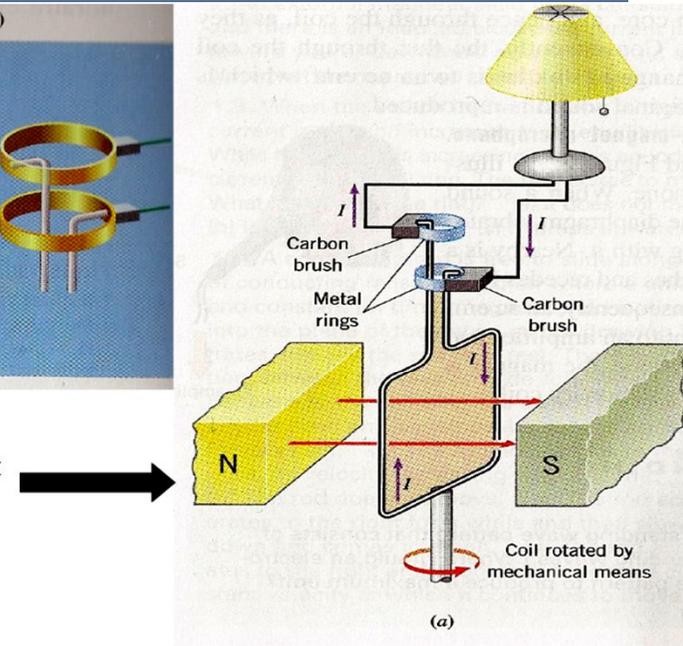
Au fur et à mesure que la bobine tourne, l'angle θ change.

C'est ce qui est à l'origine de la variation du flux magnétique à travers la bobine.

Le flux est donc donné par $\Phi_B = BS \cos(\theta(t))$.

Si l'on choisit $\theta=0$ à $t=0$ alors $\theta=\omega t$ et le flux s'écrit : $\Phi_B = BS \cos(\omega t)$

→ f.e.m induite : $E = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = \underbrace{NSB\omega}_{E_0 = \text{valeur maximale de } E} \sin(\omega t)$



$$E = NSB\omega \sin(\omega t)$$

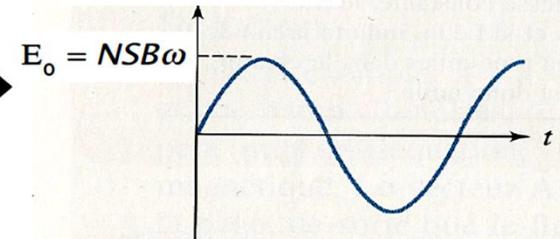


Figure 10.24 ▲

La f.é.m. alternative sinusoïdale produite par une bobine tournant dans un champ magnétique uniforme.

Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique

Equation électrique: LOI DES MAILLES

On branche la spire sur une charge de résistance R et on néglige le flux propre (auto-induction).

$$i = \frac{NBS\omega}{R} \sin(\omega t)$$

Aspect énergétique

Puissance cédée à la charge: $P_j = Ri^2 = \frac{(NBS\omega)^2}{R} \sin^2(\omega t)$

Puissance moyenne cédée à la charge: $\langle P_j \rangle = \frac{(NBS\omega)^2}{2R}$

Equation mécanique: THEOREME DU MOMENT CINETIQUE par rapport à l'axe de rotation de la spire

Système étudiée: La spire

Bilan des moments des forces:

→ M_{ext} = moment exercé par l'agent extérieur
(sens de rotation généré choisi positif)

→ $M_L = \underbrace{\quad}_{\text{moment résistif, s'oppose à la rotation}} NiSB \sin(\omega t) = -\frac{(NBS)^2 \omega}{R} \sin^2(\omega t)$

moment des forces de Laplace

(rappel: $\vec{M}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{\mu} \equiv NiS\vec{u}_n$)

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_{ext} + M_L$$

J : moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation

A l'état stationnaire
quand $\omega = \text{constante}$:

$$M_{ext} = -M_L = NISB \sin(\omega t)$$

Aspect énergétique

Puissance fournie par l'agent : $P_{ext} = M_{ext} \omega = \frac{(NBS\omega)^2}{R} \sin^2(\omega t)$

Puissance moyenne fournie par l'agent : $\langle P_{ext} \rangle = \frac{(NBS\omega)^2}{2R}$

Puissance mécanique fournie par l'agent extérieur

=

Puissance électrique dissipée dans la charge

Courants de Foucault

Description (1)

La figure 10.35 représente un barreau aimanté qui s'approche d'une plaque conductrice. Puisque le flux à travers une « spire » quelconque sur la plaque varie, des courants induits vont circuler dans le sens antihoraire (vu de l'aimant). Si l'aimant se déplace parallèlement à la plaque, la non-uniformité du champ signifie que les régions situées en avant de l'aimant subissent une augmentation de flux tandis que celles qui sont situées derrière subissent une diminution de flux. Devant l'aimant, les courants circulent dans le sens antihoraires et derrière l'aimant, ils circulent dans le sens horaire. De tels courants induits dans un matériau sont appelés **courant de Foucault** en hommage à Léon Foucault (1819–1868) qui fut l'un des premiers à observer et à étudier le phénomène.

Dans les sections précédentes, nous avons vu ce qui se passe lorsqu'une tige se déplace dans un champ magnétique. Si l'on remplace la tige par une plaque conductrice (cf. figure 10.36), les courants induits sont répartis dans l'ensemble de la plaque. Si une partie seulement de la plaque est située dans le champ, les courants dans cette partie vont être soumis à une force opposée à l'orientation du mouvement. Cette force de ralentissement peut-être utilisée pour amortir les oscillations d'un équilibre chimique ou du cadre d'un galvanomètre. De même, les courants de Foucault sont parfois utilisés dans les systèmes de freinage des trains. Une des voitures du train comporte un électroaimant placé près d'un rail. Lorsqu'on fait circuler le courant dans l'aimant, d'intenses courants de Foucault sont induits dans le rail. La force magnétique exercée sur ces courants par l'aimant est orientée vers l'avant. D'après la troisième loi de Newton, la force de réaction sur le train est orientée vers l'arrière. Les forces dues aux courants de Foucault induits sont également utilisées dans les indicateurs de vitesse des automobiles.

En circulant à l'intérieur d'un conducteur, les courants de Foucault produisent de l'énergie thermique. Cette méthode de production de chaleur est utilisée dans les fonderies et dans les procédés d'affinage pour les semi-conducteurs. Les courants de Foucault engendrés dans les casseroles en cuivre peuvent également être utilisés dans la « cuisson par induction ».

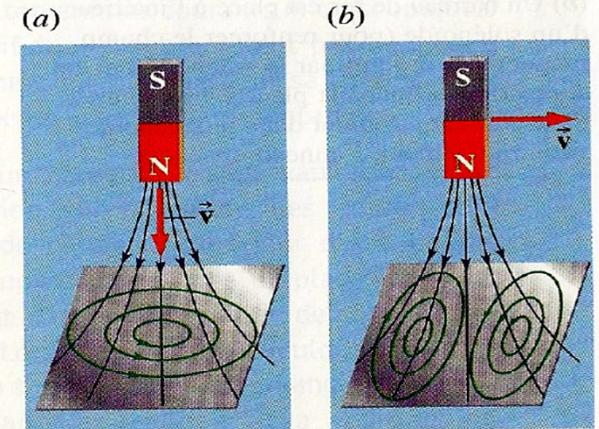


Figure 10.35 ▲

Lorsqu'un barreau aimanté se déplace par rapport à une plaque conductrice, des courants de Foucault sont induits dans la plaque.

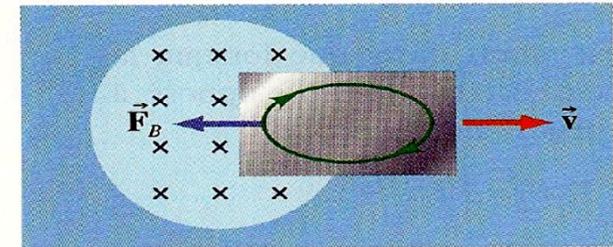
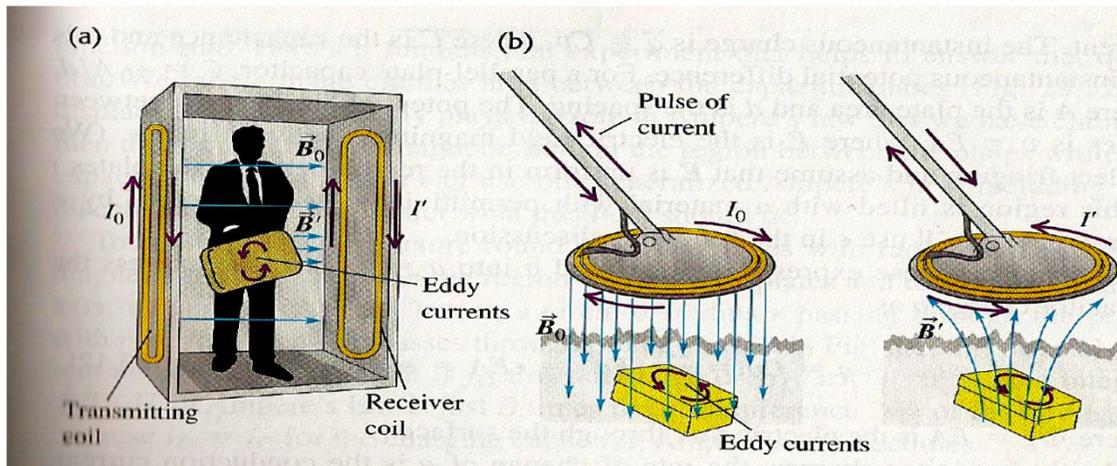


Figure 10.36 ▲

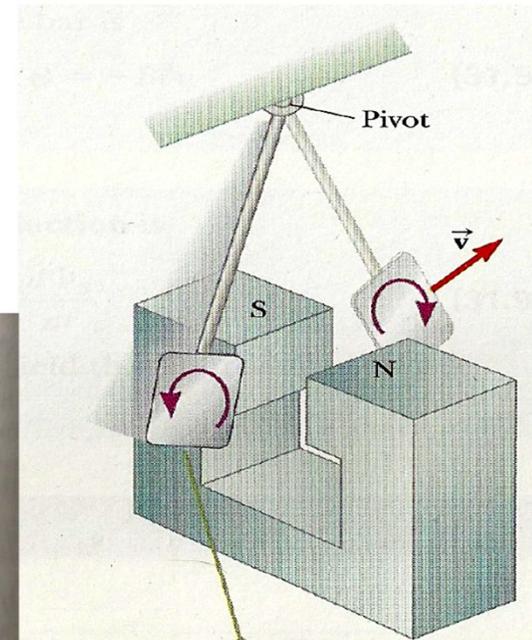
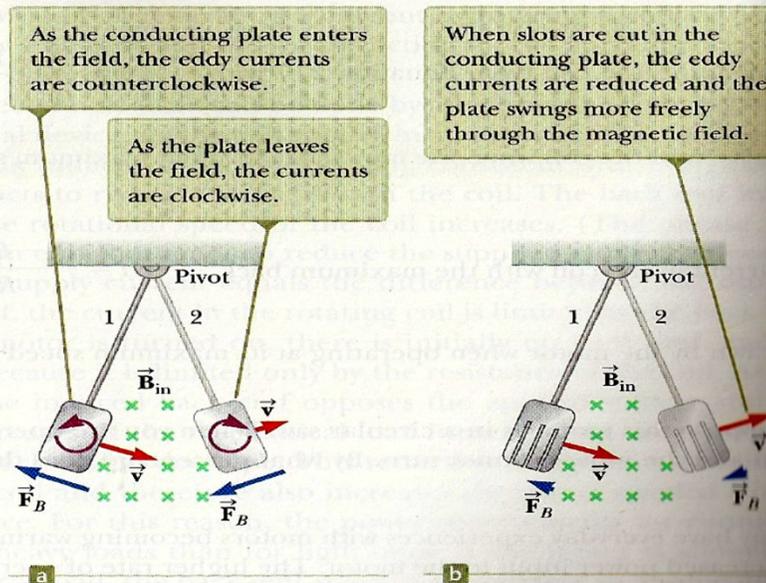
Une plaque conductrice que l'on tire dans un plan perpendiculaire aux lignes du champ. La force magnétique résultante sur les courants de Foucault induits est opposée au sens du mouvement.

Description (2)



29.20 (a) A metal detector at an airport security checkpoint generates an alternating magnetic field \vec{B}_0 . This induces eddy currents in a conducting object carried through the detector. The eddy currents in turn produce an alternating magnetic field \vec{B}' , and this field induces a current in the detector's receiver coil. (b) Portable metal detectors work on the same principle.

Figure 31.22 When a conducting plate swings through a magnetic field, eddy currents are induced and the magnetic force \vec{F}_B on the plate opposes its velocity, causing it to eventually come to rest.



As the plate enters or leaves the field, the changing magnetic flux induces an emf, which causes eddy currents in the plate.

Figure 31.21 Formation of eddy currents in a conducting plate moving through a magnetic field.

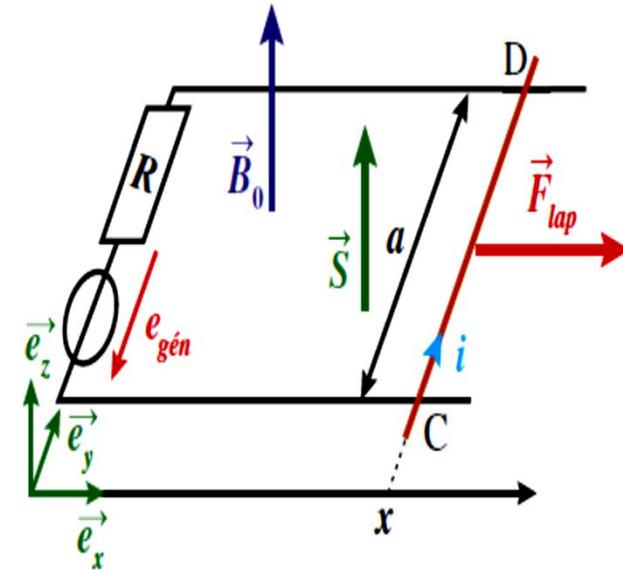
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

A-Circuit en translation type rail de Laplace en mode moteur

Équation électrique, équation mécanique et aspect énergétique (1)

Le rail de Laplace toujours plongé dans un champ magnétique (mais en l'absence d'opérateur) est connecté à un générateur qui fournit un courant circulant dans la tige, laquelle en présence du champ extérieur, est soumise à la force de Laplace

$$\vec{F}_{Lap} = i \overrightarrow{CD} \wedge \vec{B}_0 = ia \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z = iaB_0 \vec{e}_x$$



Dans le même temps, le déplacement de la tige suite à cette force génère un phénomène d'induction:

$$\phi(t) = B_0 ax(t) \text{ et } e_{ind} = -B_0 a \dot{x}$$

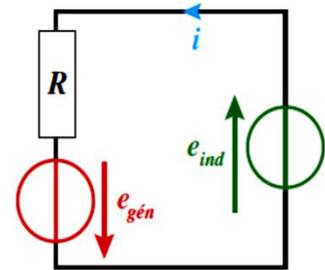
Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique (2)

La loi des mailles sur le circuit équivalent donne: $e_{gen} + e_{ind} = Ri$

⇒ **équation électrique** : $B_0 a \dot{x} + Ri = e_{gen}$

Le théorème de la résultante cinétique est projeté sur (Ox)

⇒ **équation mécanique**: $m\ddot{x} = iB_0 a$



On obtient donc un système d'équations électromécaniques couplées:

$$\begin{cases} B_0 a \dot{x} + Ri = e_{gen} \\ m\ddot{x} = iB_0 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{a^2 B_0^2}{mR} i = 0 \\ \ddot{x} + \frac{a^2 B_0^2}{mR} x = \frac{B_0 a}{mR} e_{gen} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \\ \dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \end{cases}$$

avec $\tau = \frac{mR}{a^2 B_0^2}$

$$v = v(t) = \frac{e_{gen}}{aB_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad i(t) = \frac{e_{gen} - B_0 a v(t)}{R} = \frac{e_{gen}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique (3)

Lorsque le régime permanent est atteint, le mouvement uniforme et le courant nul, la f.é.m. d'induction compensant celle du générateur.

L'analyse énergétique se fait en multipliant l'équation mécanique par la vitesse et l'équation électrique par l'intensité:

$$m\dot{x}\ddot{x} = iB_0a\dot{x} = iB_0a \frac{e_{gen} - Ri}{B_0a} = ie_{gen} - Ri^2$$
$$\Rightarrow ie_{gen} = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{fournie\ generateur} = \mathcal{P}_{Effet\ Joule} + \mathcal{P}_{cinetique}}$$

Lorsque la situation limite est atteinte, la vitesse est uniforme, le générateur ne débite plus, le courant est nul (plus d'effet Joule) aucune puissance n'est plus échangée

Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique (4)

L'énergie électrique délivrée par le générateur entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t \rightarrow \infty$ est :

$$W_{gen} = \int_0^{\infty} e_{gen} i dt = \frac{e_{gen}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \frac{e_{gen}^2}{R} \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow W_{gen} = \frac{m e_{gen}^2}{(Ba)^2}$$

L'énergie cinétique reçue par la tige CD est

$$W_{cin} = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) dt = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right]_0^{\infty} = \frac{m e_{gen}^2}{2(Ba)^2}$$

Equation électrique, équation mécanique et aspect énergétique (5)

L'énergie électrique dissipée en effet Joule est :

$$W_J = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \frac{e_{gen}^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = \frac{e_{gen}^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty}$$
$$\Rightarrow W_J = \frac{me_{gen}^2}{2(Ba)^2}$$

L'énergie du générateur est répartie à parts égales entre la tige T et les pertes par effet Joule : $W_{gen} = W_{cin} + W_J$. Ce moteur présente donc un rendement de 0,5 (ce qui est très mauvais pour un moteur électrique).

B-Moteur à courant continu

Description et principe de fonctionnement (1)

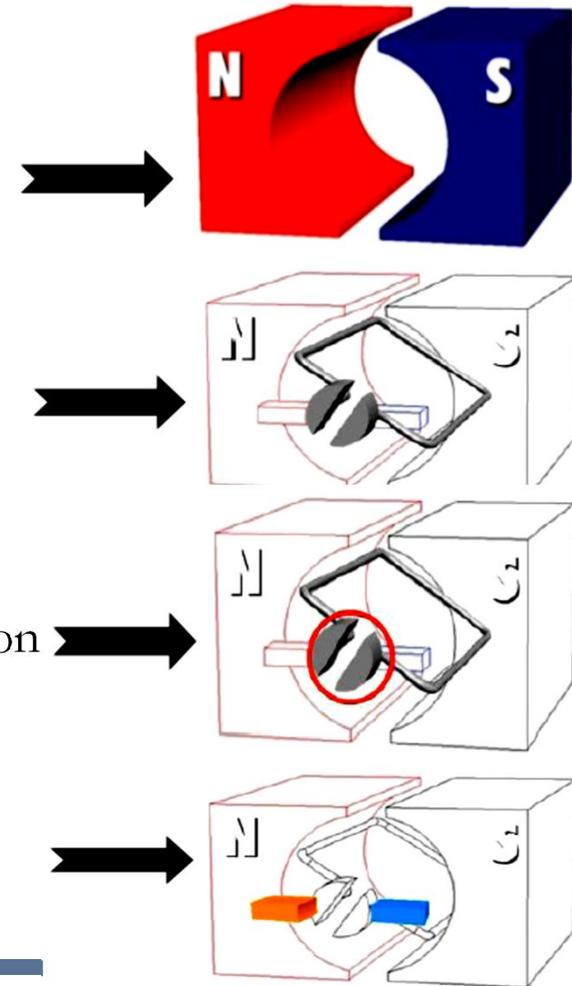
Les moteurs à courant continu sont très utilisés dans les domaines de la robotique et de l'automatique. Il est alimenté par une tension continue. Il est constitué des éléments suivants:

✓ Un inducteur appelé **STATOR**. Il est composé soit d'aimants permanents, soit d'enroulements bobinés autour d'un élément immobile du stator. Il crée le champ magnétique dit statorique.

✓ Un induit appelé **ROTOR**. Le rotor cylindrique est composé de tôles isolées entre elles et munies d'encoches dans lesquelles sont réparties les conducteurs. Parcourus par un courant, ceux-ci créent le champ magnétique rotorique.

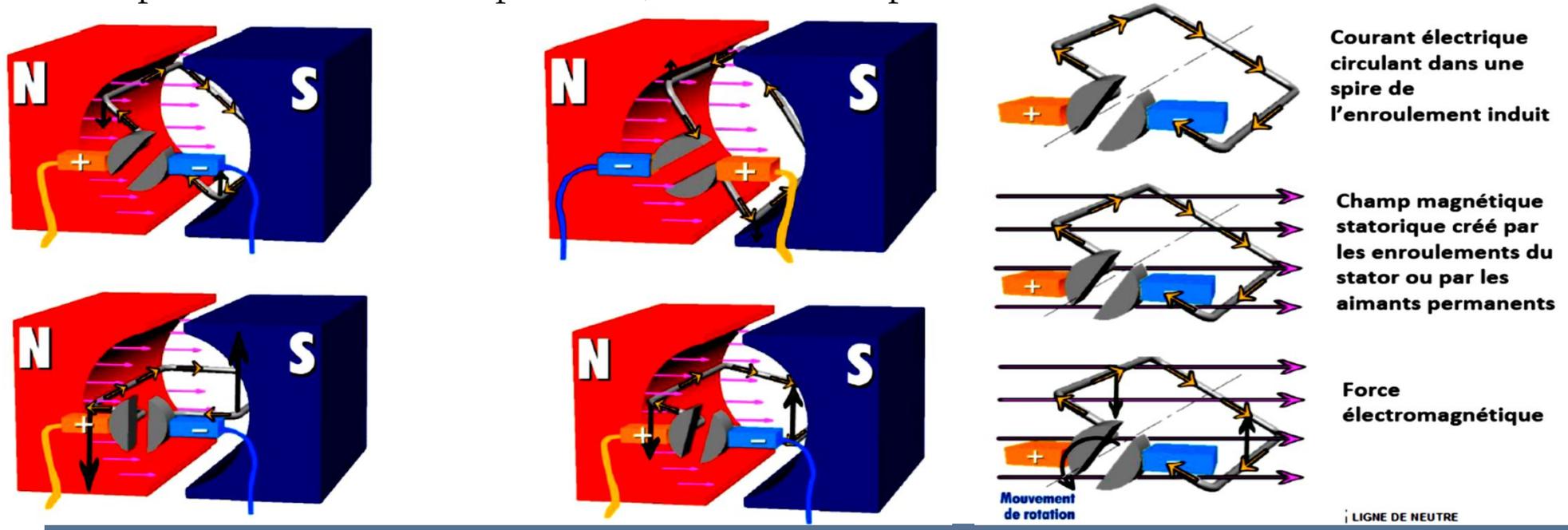
✓ Un **COLLECTEUR** fixé au rotor, il est en contact avec les charbons

✓ Des **CHARBONS** appelés aussi balais. Ils alimentent l'induit par le collecteur sur lequel ils frottent.



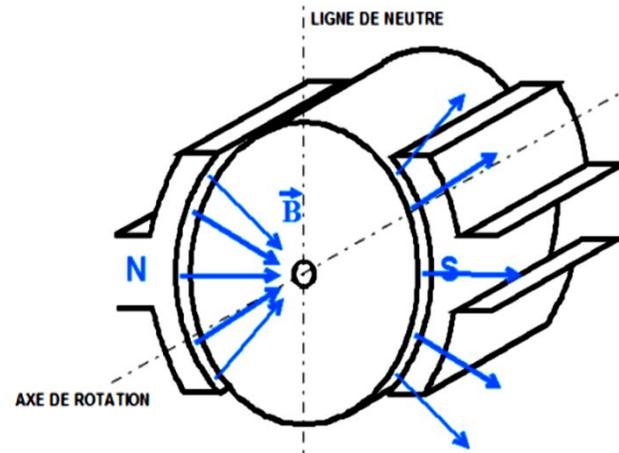
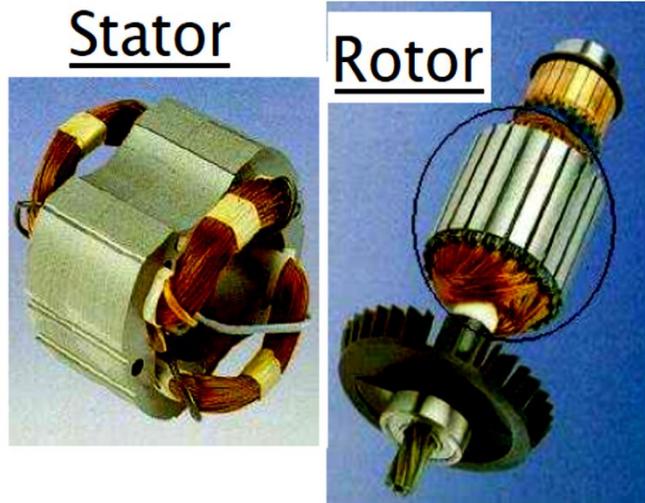
Description et principe de fonctionnement (2)

- ✓ Le rotor est plongé dans le champ magnétique créé par le stator.
- ✓ Par l'intermédiaire des charbons et du collecteur, un courant électrique circule dans les enroulements du rotor.
- ✓ Chacune des spires de chaque enroulement est alors soumise à une force électromagnétique (force de Laplace).
- ✓ Le collecteur étant constitué de plusieurs parties, il y a des points neutres pour lesquels la spire n'est pas aimantée. Sur ces positions, la force de Laplace est nulle.



Description et principe de fonctionnement (3)

✓ Le circuit magnétique de l'inducteur (stator) possède une forme qui épouse celle de l'induit (rotor). Cela permet d'obtenir **un champ magnétique radial** dans l'entrefer de la machine. Ainsi quelque soit sa position, le rotor voit toujours quasiment le même champ magnétique sauf au niveau de la ligne de neutre ou celui-ci s'annule. **L'ENTREFER** est la zone d'air comprise entre le stator et le rotor.



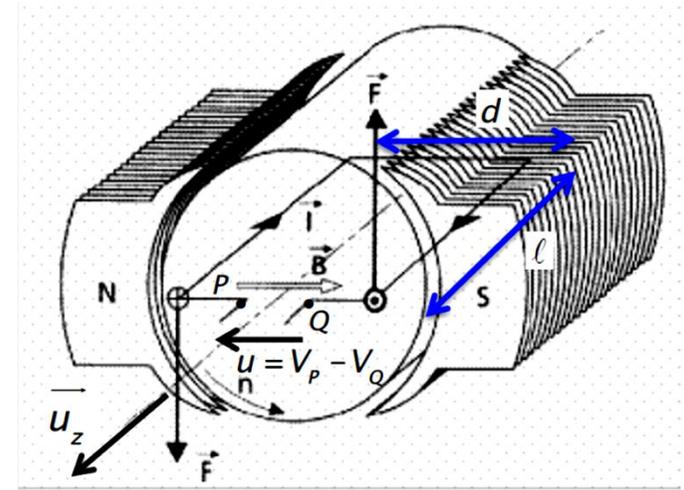
Aspect mécanique (1)

La spire est soumise aux forces de Laplace telles que:

$$\rightarrow \sum \vec{F}_L = 0$$

$$\rightarrow \vec{M}_L = \underbrace{d\ell B}_{\substack{\text{constante propre au moteur noté } \Phi_0 \\ \text{unité: celle d'un flux en weber Wb}}} i u_z = \underbrace{\Phi_0 i}_{\substack{\text{appelée couple moteur}}} \vec{u}_z$$

$$\rightarrow \text{Puissance mécanique : } P_m = M_L \omega = \Phi_0 i \omega$$



De même que la force de Laplace est proportionnelle à l'intensité du courant dans un conducteur, le couple mécanique d'une machine à courant continu est proportionnel à l'intensité du courant.

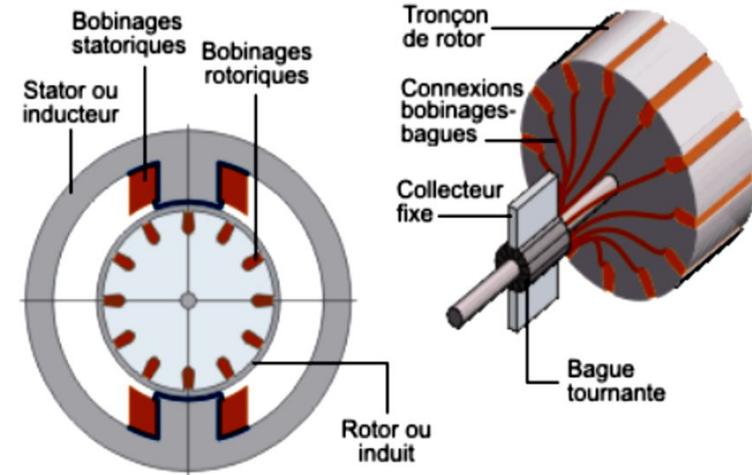
Une machine réelle n'est pas constituée que d'une seule spire mais de plusieurs spires qui composent un enroulement. On peut montrer que le couple moteur (le moment des forces de Laplace) reste proportionnel au courant électrique qui circule dans le stator:

Aspect mécanique (2)

$$\text{Couple moteur : } M_L = \Phi_0 i$$

La charge mécanique entraînée par le moteur fait intervenir un couple résistant qui peut également englober des frottements:

$$\vec{M}_c = \underbrace{-M_c \vec{u}_z}_{\text{Moment résistant s'oppose à la rotation}}$$



En appliquant le théorème du moment cinétique au rotor par rapport à l'axe de rotation, on a l'équation mécanique différentielle du mouvement :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Phi_0 i - M_c$$

moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation

Aspect électrique (1)

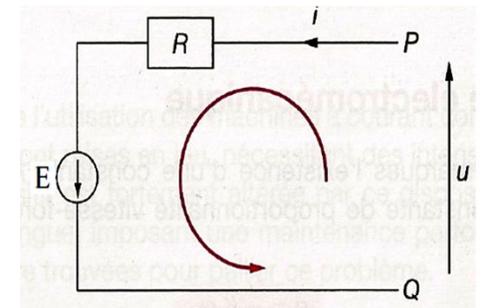
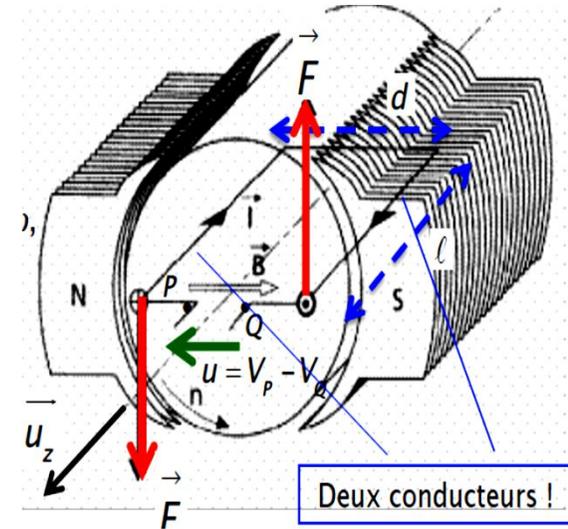
→ On s'appuie sur le schéma électrique de la spire ci-dessous (on néglige l'auto-induction). Pour un générateur type rail de Laplace, on a vu que la f.é.m. induite était proportionnelle à la vitesse de déplacement de la tige :

$$E = -B\ell v$$

→ Par analogie, en notant que pour la spire en rotation à la vitesse angulaire ω , $v = d\omega/2$ et que l'on a deux rails de Laplace, on obtient :

$$\text{f.e.m d'induction : } E = -d\ell B \omega = - \underbrace{\Phi_0}_{\text{même constante qui apparaît dans le couple moteur !}} \omega$$

De même que la f.e.m est proportionnelle à la vitesse dans l'expérience des rails de Laplace, la f.e.m est proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation dans une machine à courant continu.



Aspect électrique (2)

Une machine réelle n'est pas constituée que d'une seule spire mais de plusieurs qui composent un enroulement. On peut montrer que la proportionnalité de la f.é.m. à la vitesse angulaire, obtenue pour une spire quelconque, reste vraie pour l'enroulement.

→ En utilisant le schéma électrique équivalent:

$$u = Ri - E = Ri + \Phi_0 \omega$$

→ On multiplie de chaque côté cette équation par i , on retrouve un bilan d'énergie:

$$ui$$

$$= Ri^2 - Ei =$$

$$Ri^2$$

+

$$\Phi_0 \omega i$$

P_e = Puissance électrique cédée par la source de tension d'alimentation du moteur

puissance cédée dans la résistance, effet Joule

P_m = Puissance mécanique de rotation du rotor

→ Si pas de résistance dans le rotor: $P_e = P_m$

Fonctionnement en régime stationnaire (1)

→ **Régime stationnaire = les grandeurs sont constantes dans le temps**

Le moteur à courant continu entraîne une charge mécanique. On souhaite déterminer, en régime stationnaire, à quelle vitesse angulaire tourne l'ensemble. La source d'alimentation impose une tension u au moteur.

→ En régime permanent :

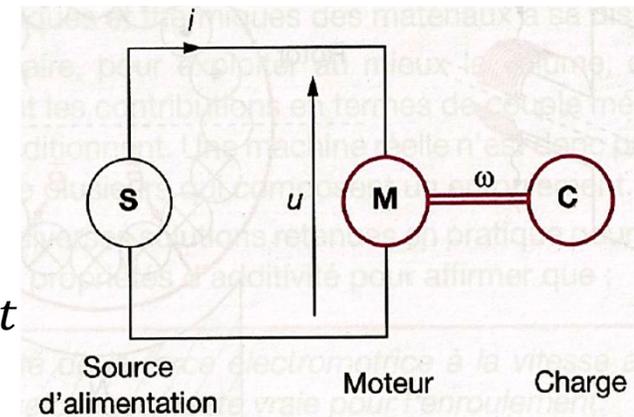
$$J \frac{d\omega}{dt} = \Phi_0 i - M_c = 0 \Rightarrow \underbrace{\Phi_0 i}_{M_L = \text{couple moteur}} = \underbrace{M_c}_{\text{couple résistant}}$$

→ Equation électrique :

$$u = Ri + \Phi_0 \omega \Rightarrow i = \frac{u - \Phi_0 \omega}{R}$$

→ Couple moteur :

$$M_L = \Phi_0 \frac{u}{R} - \frac{\Phi_0^2}{R} \omega = M_c$$

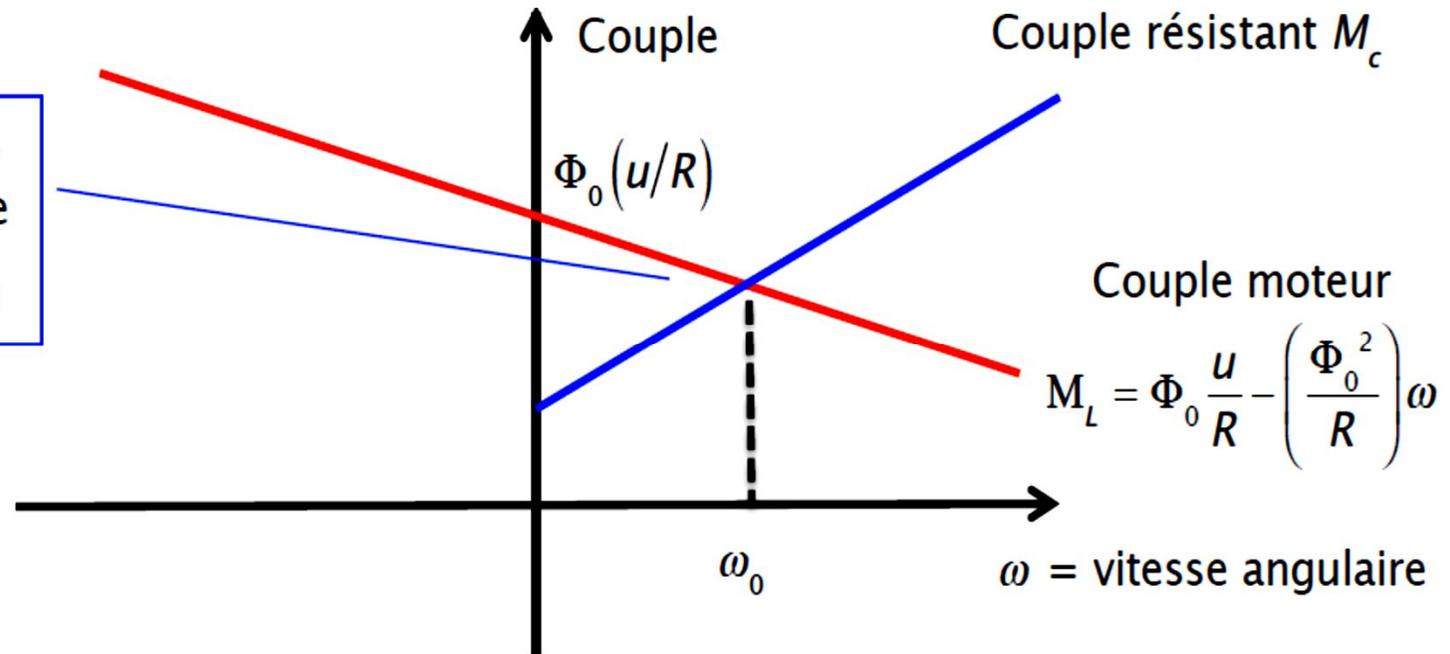


Fonctionnement en régime stationnaire (2)

→ On peut résoudre cette équation en traçant dans le plan couple-(vitesse angulaire):

- La caractéristique du moteur donnée par la loi précédente
- La caractéristique de la charge que l'on suppose connue de type affine (frottement fluide plus sec par exemple)

Point de fonctionnement, donne la vitesse angulaire en régime stationnaire ω_0



Fonctionnement en régime transitoire: essai à vide

Dans cette partie, on étudie un exemple d'évolution non stationnaire, variable dans le temps.. Pour un moteur, il s'agit d'une mise en mouvement, d'un arrêt, d'une phase de variation de la vitesse etc... On va s'intéresser au cas particulier **de l'essai à vide durant lequel le moteur n'entraîne aucune charge**. Le couple résistant est nul.

OBJECTIF: Déterminer l'évolution de $\omega(t)$ et $i(t)$

→ Equation mécanique : $J \frac{d\omega}{dt} = \Phi_0 i$
 → Equation électrique : $u = Ri + \Phi_0 \omega$ } Loi d'évolution de la vitesse (eq. diff.) :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\Phi_0^2}{RJ} \omega = \frac{\Phi_0}{RJ} u$$

Machine à courant continu modélisé par un système du premier ordre (après des simplifications !)

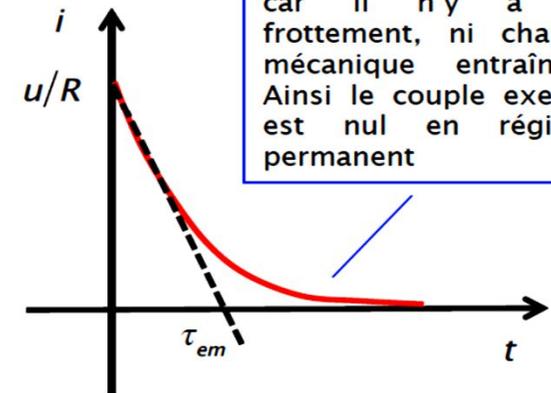
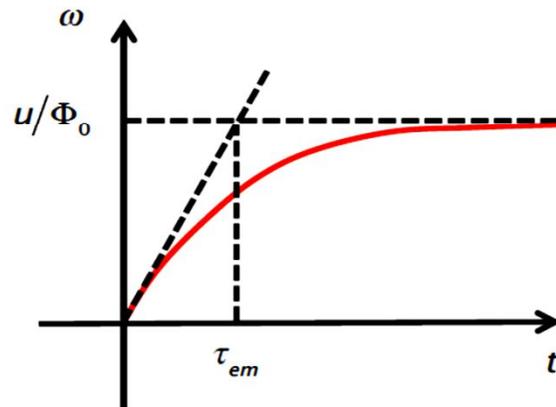
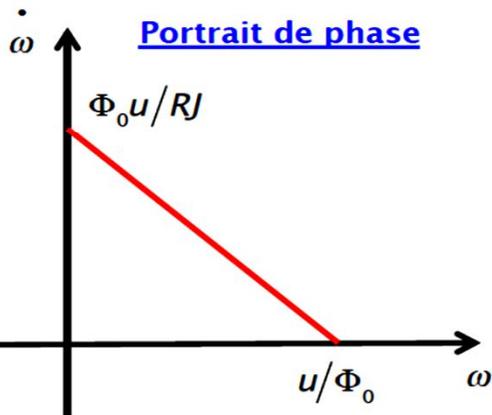
→ Temps caractéristique d'évolution, constante de temps électromécanique : $\tau_{em} \equiv \frac{RJ}{\Phi_0^2}$

→ Solutions avec une vitesse angulaire nulle au départ :

$$\omega(t) = \frac{u}{\Phi_0} [1 - e^{-t/\tau_{em}}]$$

$$i(t) = \frac{u}{R} e^{-t/\tau_{em}}$$

L'intensité tend vers 0 car il n'y a ni frottement, ni charge mécanique entraînée. Ainsi le couple exercé est nul en régime permanent



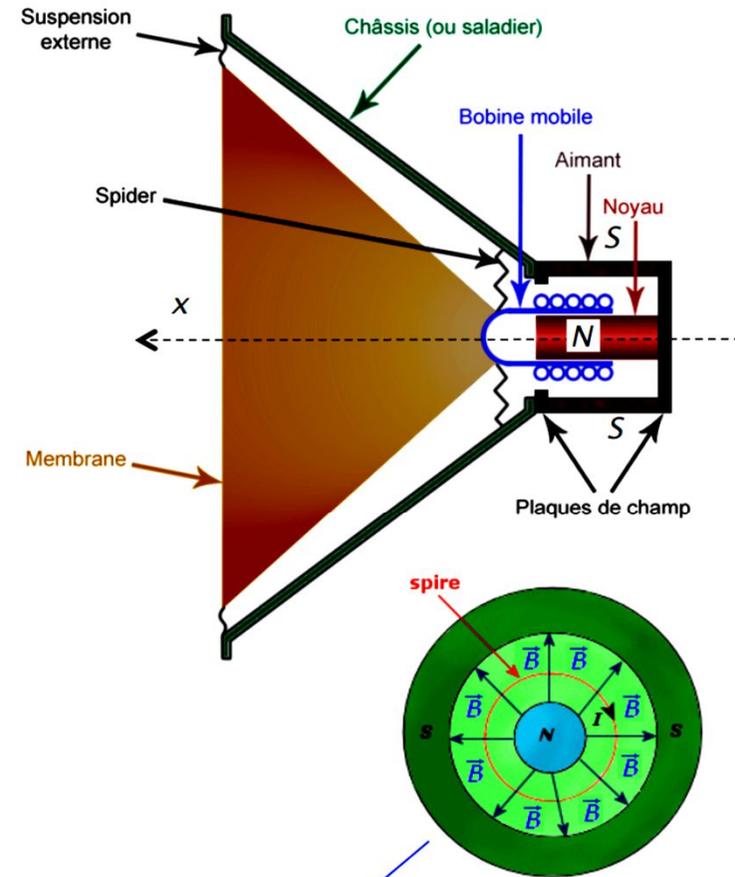
C-Haut Parleur électrodynamique

Description (1)

La fonction d'un haut-parleur électrodynamique dans une enceinte est d'agir comme un double transformateur d'énergie:

✓ Premièrement, il reçoit le signal audio, qui est une **énergie électrique**, qu'il va transformer en une **énergie mécanique**. En effet, certaines parties du haut-parleur (la bobine mobile) vont se mettre en mouvement lorsqu'un signal audio est reçu.

✓ Deuxièmement, il transforme cette énergie mécanique en une **énergie acoustique**, grâce à sa membrane. Celle-ci est reliée à la bobine mobile, et aura donc les mêmes mouvements que cette dernière.



Le champ magnétique créé par l'aimant est perpendiculaire en tout point au courant qui circule dans chacune des spires.

Description (2)

Et c'est en se déplaçant sous l'action de la bobine mobile que la membrane créera une pression acoustique, qui n'est autre chose que le son produit.

Le principe de base du fonctionnement d'un haut-parleur est régi par la loi de Laplace. Les 2 conditions indispensables de départ sont:

- ✓ **L'aimant** crée un champ magnétique au niveau de la bobine.
- ✓ La **bobine mobile** est elle-même parcourue par un courant alternatif, qui provient de l'amplificateur audio.

Avec ces 2 conditions, la loi de Laplace montre qu'une force apparaît alors au niveau de la bobine mobile, qui la fait se déplacer dans un sens ou dans l'autre en fonction du sens du courant qui la parcourt.

Description (3)

Comme la bobine mobile est reliée à la **membrane**, cette dernière suit les mouvements de la bobine. Par ses déplacements, la membrane exerce des pressions sur l'air environnant (des surpressions lorsque la bobine et la membrane se dirigent vers l'extérieur du haut-parleur, et des dépressions lorsque la bobine et la membrane rentrent vers l'intérieur).

Ce sont ces variations de pression qui produisent le son que l'on perçoit.

Le rôle du **spider** et de la **suspension extérieure** est simplement de guider le mouvement de va-et-vient de la bobine et de la membrane bien dans l'axe du haut-parleur, et que ceux-ci n'aillent pas de travers.

Description (4)

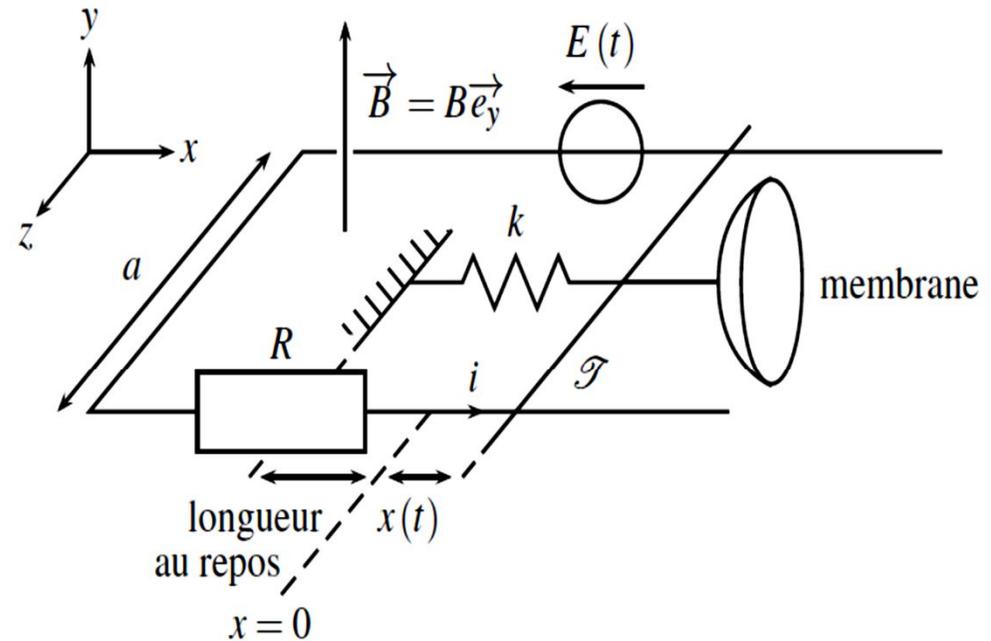
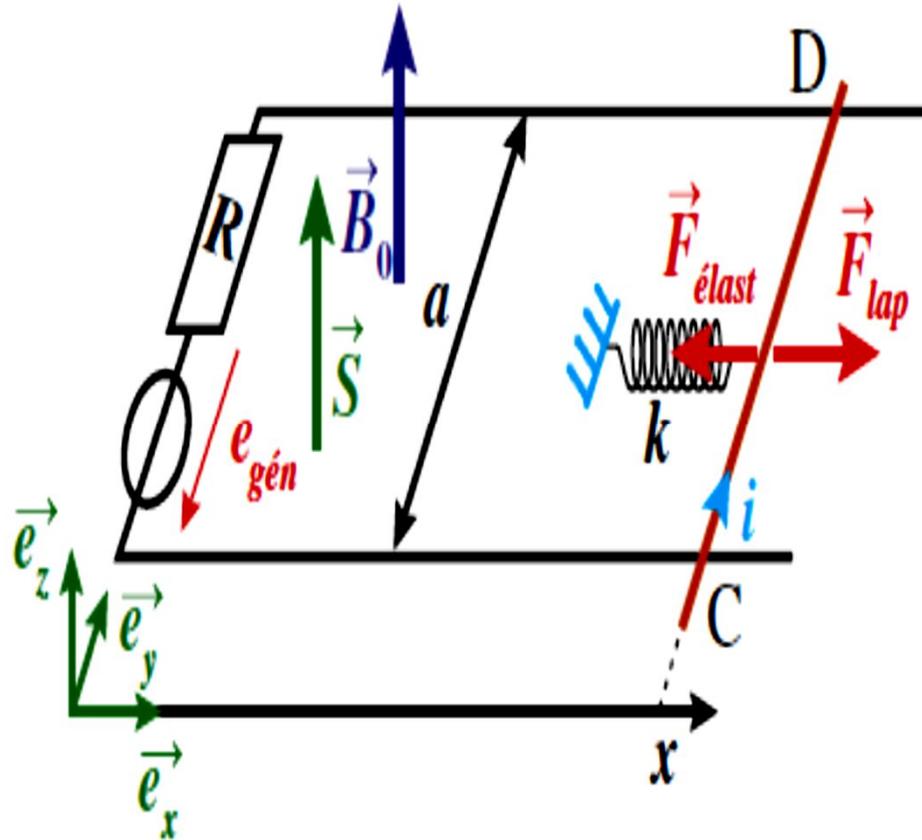


Figure 30.10 – Schéma de principe d'un haut-parleur.

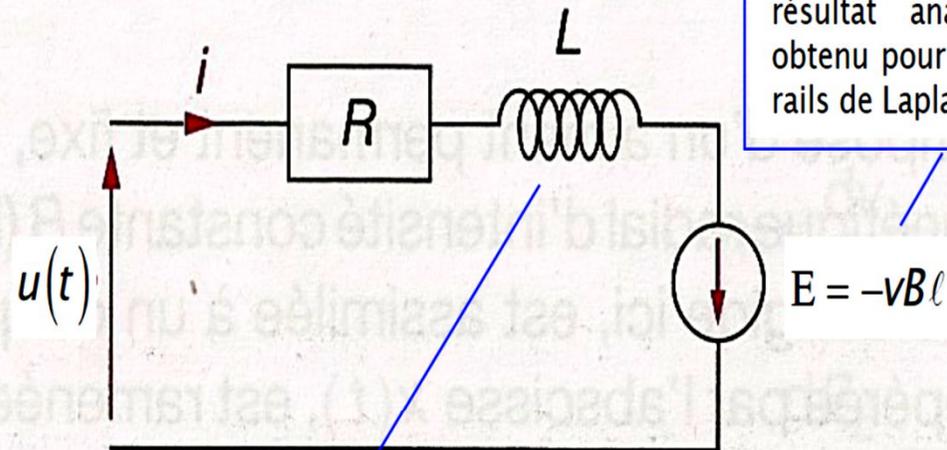
La force de frottement fluide n'est pas représenté sur les schémas

Aspect électrique

SYSTEME ETUDIE = {Bobine + membrane} libre de se déplacer suivant l'axe Ox , soumis à une tension d'alimentation $u(t)$.

Schéma électrique équivalent

Tension d'alimentation du haut parleur



f.e.m d'induction de Lorentz, résultat analogue à celui obtenu pour le dispositif des rails de Laplace.

Loi des mailles : $u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{dx}{dt} B\ell$

f.e.m d'auto-induction

Aspect mécanique

Bilan des forces appliquées au système :

→ Les oscillations de la membrane vont générer des ondes sonore, on tient compte de ce couplage par une

force de type frottement fluide: $\vec{F}_{fluide} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$

→ Force de rappel élastique: $\vec{F}_e = -kx\vec{u}_x$ avec $x = 0$ position d'équilibre horizontale

→ Force de Laplace sur les bobines: $\vec{F}_L = i\ell B\vec{u}_x$

→ Poids et réaction du support, forces verticales qui se compensent.

Application de la seconde loi de Newton projetée sur Ox :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha \frac{dx}{dt} + i\ell B \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{i\ell B}{m}$$

ordre de grandeurs:

→ Avec $R = 6 \Omega$ et $L = 0,5 \text{ mH}$

$$\tau_e \equiv \frac{L}{R} = 8,3 \times 10^{-5} \text{ s}$$

temps électrique caractéristique

$$\tau_e \ll \frac{1}{f_{La} = 440 \text{ Hz}} = 2,3 \times 10^{-3} \text{ s}$$

→ Avec $m = 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg}$, $k = 6000 \text{ N.m}^{-1}$

$$\text{et } \alpha = 30 \text{ kg.s}^{-1} : T_0 \equiv 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 10^{-2} \text{ s}$$

période d'oscillation non amortie en régime libre et sans phénomène d'induction: dans le domaine audible

$$\tau_m \equiv \frac{m}{\alpha} = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

temps mécanique caractéristique $\ll T_0$

fort couplage avec l'air ambiant, normal !

Aspect énergétique (1)

On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$-\ell Bvi - Li \frac{di}{dt} + ui = Ri^2 \Rightarrow ui - \ell Bvi = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2$$

$$mv \frac{dv}{dt} = i \ell Bv - kxv - \alpha v^2 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = i \ell Bv - kx \frac{dx}{dt} - \alpha v^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + \alpha v^2 = i \ell Bv$$

$$\begin{cases} ui - \ell Bvi = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) + Ri^2 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) + \alpha v^2 = i \ell Bv \end{cases}$$

Aspect énergétique (2)

En combinant ces deux équations pour faire disparaître $i\ell Bv$, et multipliant le résultat par dt on a

$$uidt = d\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right) + \alpha v^2 dt + Ri^2 dt$$

$uidt$ est l'énergie fournie à l'équipage mobile pendant dt ; elle sert à :

- augmenter les différentes formes d'énergie de l'équipage mobile (énergie emmagasinée pour mettre l'équipage en mouvement)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}Li^2\right)$$

- compenser les pertes par effet joule $Ri^2 dt$
- produire une onde sonore $\alpha v^2 dt$

Aspect énergétique (3)

En régime sinusoïdal permanent ou établi, on fait le bilan des puissances moyennes ;

$$\frac{1}{T} \int_0^T ui \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \alpha v^2 \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2 \, dt$$

$$\langle ui \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) \right\rangle + \langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle$$

Les diverses formes d'énergie étant des fonctions périodiques du temps, on a :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} Li^2 \right) \right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle ui \rangle = \langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle$$

Aspect énergétique (4)

En valeur moyenne, la puissance fournie par le générateur est entièrement consommée par les phénomènes dissipatifs. Mais dans le modèle adopté, la puissance de la force de type fluide est en fait la puissance sonore rayonnée : c'est donc la puissance utile. En revanche, la puissance dissipée par effet joule constitue bien une perte. On peut donc définir le rendement du haut-parleur par le rapport suivant:

$$\eta = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle ui \rangle} = \frac{\langle \alpha v^2 \rangle}{\langle \alpha v^2 \rangle + \langle Ri^2 \rangle}$$

Le rendement η est d'autant plus élevé que α est grand ou R petit

Remarque : les haut-parleurs de 4Ω sont aussi meilleurs que ceux de 8Ω

Régime harmonique (1)

On a un système linéaire aussi bien du point de vue mécanique que électrique. On alimente le haut parleur par une tension alternative, on travaille donc en **régime sinusoïdale forcé**. On va travailler en représentation complexe.

→ Equation électrique: $\underline{U} = j\omega B\ell \underline{X} + (R + j\omega L) \underline{I}$

→ Equation mécanique: $(-m\omega^2 + k + j\alpha\omega) \underline{X} = \underline{I}\ell B$

On peut définir les fonctions de transfert

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{X}}{\underline{U}} \quad \text{ou} \quad \underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}}{\underline{U}}$$

suivant que l'on étudie la relation {tension d'entrée-position membrane} ou {tension d'entrée-vitesse membrane}.

En pratique, la réponse d'un haut-parleur doit être examinée sur tout l'intervalle de fréquence audible, en vue de définir quelles sont les gammes de fréquences avantageées ou au contraire défavorisées. Une enceinte acoustique idéale devrait posséder une réponse constante dans toute la bande, ce qui est illusoire.

Régime harmonique (2)

On recourt alors à diverses techniques pour faire au mieux :

- ✓ Associer plusieurs haut-parleurs dans des domaines spectraux audibles connexes (grave, medium, aigu).
- ✓ On utilise l'ébénisterie pour obtenir une caisse de résonance (effet non décrit ici).
- ✓ On asservit les enceintes en détectant le son en sortie et en agissant par rétroaction sur l'amplificateur qui alimente le haut-parleur.

Une autre approche est nécessaire à présent : elle vise à déterminer le comportement électrique du haut-parleur, qui se présente au générateur comme un dipôle.

Impédance du haut-parleur (1)

→ Impédance complexe du haut parleur : $\underline{Z} \equiv \frac{U}{I} = \underbrace{R + jL\omega}_{Z_e = \text{impédance électrique}} + \frac{\ell^2 B^2}{\underbrace{\alpha + \frac{k}{j\omega} + jm\omega}_{Z_m = \text{impédance motionnelle}}}$

Z_m = impédance motionnelle
rend compte du couplage électromécanique

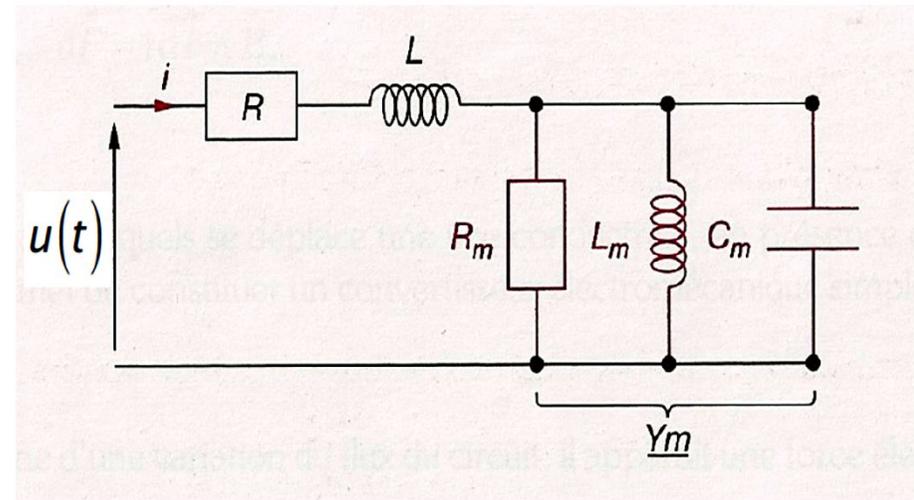
→ Si $B = 0$, $\underline{Z}_e = R + jL\omega$, on retrouve les paramètres électriques de la bobine.

→ $\underline{Y}_m \equiv \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{\alpha}{\ell^2 B^2} + \frac{k}{\ell^2 B^2} \frac{1}{j\omega} + \frac{m}{\ell^2 B^2} j\omega$

résistance $\equiv \frac{1}{R_m}$ inductance $\equiv \frac{1}{L_m}$ capacité $\equiv C_m$



Schéma électrique équivalent
Du haut-parleur



ordre de grandeurs:

→ Avec $B = 2 \text{ T}$ et $\ell = 10 \text{ m}$

$R_m = 13 \Omega$, $L_m = 0,07 \text{ H}$ et $C_m = 3,8 \times 10^{-5} \text{ F}$

$R_m > R$ car on veut un fort couplage électromécanique,

la puissance absorbée par R_m traduit la puissance acoustique émise !

Impédance du haut-parleur (2)

L'impédance motionnelle est une traduction électrique, à travers le convertisseur électromécanique, d'un oscillateur mécanique (inertie, élasticité, amortissement). Les expressions respectives des composants permettent d'associer à chaque phénomène mécanique une analogie électrique.

→ La puissance électrique absorbée par R_m est la puissance convertie en une onde sonore. Or c'est le frottement visqueux qui rend compte, par réaction, de l'amortissement de la membrane dû à cette émission. Ceci justifie que la valeur de R_m soit liée à celle de f :

$$R_m = \frac{\ell^2 B^2}{\alpha}$$

Impédance du haut-parleur (3)

→ De la même manière, observant le lien entre L_m et k :

$$L_m = \frac{\ell^2 B^2}{k}$$

on déduit que, dans cette analogie, l'inductance motionnelle rend compte de l'élasticité de l'oscillateur mécanique.

→ Enfin, la capacité C_m traduit l'inertie du résonnateur mécanique, d'où le lien avec la masse :

$$C_m = \frac{m}{\ell^2 B^2}$$

- ✓ D'un point de vue énergétique, les termes dissipatifs effet Joule et frottement sont associés.
- ✓ Les éléments réactifs de l'impédance, qui correspondent à une énergie emmagasinée magnétique ou électrique, traduisent l'existence d'énergie potentielle élastique et d'énergie cinétique.